المحاضرة السادسة

6.3 بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

1.6.3 بعض التوزيعات الاحتمالية المنقطعة:

نتناول فيما يأتي بعض التوزيعات الاحتمالية التي تؤِّدي دوراً مهمّاً في حل كثير من المسائل التطبيقية.

1.1.6.3 توزيع برنولي: نسمي كل تجربة لها نتيجتان تجربة برنولية (ثنائية). نسمي إحدى النتيجتين نجاحاً، ونسمي النتيجة الأخرى فشلاً، فإذا كان P يمثل احتمال النجاح عندها نسمي P وسيط التجربة البرنولية، و $q = 1 - P$ احتمال الفشل.

فتجربة إلقاء قطعة نفود متزنة هي تجربة برنولية لها نتيجتان ، إما الشعار (نجاح) إمّا الكتابة (فشل) ، ووسيط هذه التجربة البرنولية $P = \frac{1}{2}$

والتسديد نحو هدف هو تجربة برنولية ، ونتيجة طالب في امتحان مقرر ما هي تجربة برنولية ، وانتظار مولود لمعرفة جنسه هي تجربة برنولية أيضاً إلخ ....

إذا رمزنا بـ x لعدد مرات النجاح في تجربة برنولية وسيطها P ، تكون مجموعة قيم X هي $R_X = \{0,1\}$ ويكون احتمال النجاح $P = P(X = 1)$

واحتمال الفشل $q = P(X = 0) = 1 - P$ ، $q = 1 - P$

أي إن لـ X التوزيع الاحتمالي :

X	0	1
$P(X = x) = f(x)$	q	P

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيعاً برنولياً بالوسيط P إذا كان لـ X دالة الاحتمال:

$$f(x) = P^x q^{1-x} \;,\; x = 0,1 \;\;, q = 1 - P \;\;,\; 0 < P < 1$$

أي إن لـ X جدول التوزيع الاحتمالي :

X	0	1
$f(x)$	q	P

<u>التوقع الرياضي والتباين :</u>

$$E(X) = \sum_x x.f(x) = \sum_{x=0}^{1} x P^x q^{1-x} = 0 + P = P$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0^2(q) + 1^2(P) = P$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = P - P^2 = P(1 - P) = pq$$

$$\sigma_X = \sqrt{pq}$$

2.1.6.3 التوزيع الثنائي (الحداني):

إذا كررنا تجربة برنولية وسيطها P (احتمال النجاح) n مرة ، وكانت هذه التكرارات مستقلة. إذا رمزنا بـ X لعدد مرّات النجاح عند تكرار هذه التجربة البرنولية n مرّة ، فإن مجموعة قيم X هي $R_X = \{0,1,2, \dots\dots, n\}$

ويمكننا أن نثبت أنّ:

$$f(x) = P(X = K) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ p^k q^{n-k} \ , \ K = 0,1,2, \dots\dots, n$$

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيعاً ثنائياً (حدانياً) بالوسيطين n و P إذا كان لـ X دالة الاحتمال:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \ p^x q^{n-x} \ , x = 0,1, \dots n$$

أي إن لـ X جدول التوزيع الاحتمالي:

X	0	1	.....	K	...	n
f(x)	q^n	npq^{n-1}	....	$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$	...	P^n

نعود لنؤكد أن المتغير العشوائي X الذي له التوزيع الحداني بالوسيطين n و P (أي $X \sim b(n; P)$) يمثل عدد مرات النجاح عند تكرار تجربة برنولية (وسيطها P) n مرّة .

يمكننا أن نثبت أنّ هذه الدالة تحقق الشرطين :

1. $f(x) \geq 0$ من أجل جميع قيم x

2. $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$

<u>مثال (30.3):</u> إذا كان احتمال أن يصيب رامٍ الهدف 0.8 ، فإذا صوب الرامي نحو الهدف 5 مرات ورمزنا بـ X لعدد مرات إصابة الهدف .

المطلوب:

أ- اكتب دالة احتمال المتغير العشوائي X .

ب- احسب احتمال اصابة الهدف مرة واحدة فقط.

ت- احسب احتمال إصابة الهدف مرّة واحدة على الأكثر.

ث- احسب احتمال اصابة الهدف مرتين على الأقل.

ج- احسب احتمال إصابة الهدف.

الحل:

أ- إنّ التسديد نحو الهدف تجربة برنولية لها نتيجتان ، إما النجاح (إصابة الهدف) وإما الإخفاق (عدم إصابة الهدف) ووسيطها $P = 0.8$ والتسديد نحو الهدف 5 مرات يعني تكرار هذه التجربة البرنولية 5 مرات ، ومِنْ ثَمَّ يكون لـ X (عدد مرات إصابة الهدف) التوزيع الحداني بالوسيطين $n = 5$ و $P = 0.8$

أي إنّ:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{5!}{x!(5-x)!} (0.8)^x (0.2)^{5-x} \ ; x = 0,1,2,3,4,5$$

ب- الاحتمال المطلوب:

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{5!}{1!4!} (0.8)^1 (0.2)^4 = 5(0.8)(0.0016) = 0.0064$$

ت-

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5!}{0!5!}(0.8)^0(0.2)^5 + 0.0064 =$$

$$(0.2)^5 + 0.0064 = 0.00672$$

ث-

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \ge 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \le 1)$$
$$= 1 - 0.00672 = 0.99428$$

ج-

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \ge 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0)$$
$$= 1 - 0.00032 = 0.99968$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$\boldsymbol{\mu} = E(X) = nP = (5)(0.8) = 4$$

$$\sigma^2 = V(X) = nPq = (5)(0.8)(0.2) = 0.8$$

مثال (31.3):

إذا علمت أن احتمال شفاء مريض مصاب بالزكام خلال أسبوع دون اللجوء إلى الطبيب هو 0.6 فإذا كان لدينا 10 مرضى بالزكام ولم يراجعوا الطبيب ، فما احتمال أن يشفى بعضٌ منهم خلال أسبوع:

1. ثلاث مرضى.
2. 8 مرضى على الأقل.
3. من 2 إلى 5 مرضى .

4 . 6 مرضى.

الحل:

النموذج المدروس هو تجربة ثنائية (يشفى أو لا يشفى) ومكرره تكرار مستقل 10 مرات.

فإذا كان X المتغير الدال على المرضى الذين يتم شفاؤهم خلال أسبوع من الزكام دون اللجوء إلى الطبيب فعندئذٍ: $X \sim b(n = 10 , P = 0.6)$

$$P[X = K] = \binom{n}{k} P^K q^{n-k} = \binom{10}{k} (0.6)^K (0.4)^{10-k} \;\; ; k = 0,1,2,..,10$$

الطلب (1): $P[X = 3] = \binom{10}{3} (0.6)^3 (0.4)^7 = 0.0433$

الطلب (2):

$$P[X \geq 8] = p[x = 8] + p[x = 9] + p[x = 10] =$$

$$\binom{10}{8} (0.6)^8 (0.4)^2 + \binom{10}{9} (0.6)^9 (0.4) + \binom{10}{10} (0.6)^{10} (0.4)^0$$

$$=0.1209 + 0.0403 + 0.006 = 0.1672$$

الطلب (3):

$$P[2 \leq x \leq 5] = p[x = 2] + p[x = 3] + p[x = 4] + p[x = 5]$$

$$=0.0106+0.0423+0.1050+0.2007 =0.3586$$

الطلب (4):

$$P[X = 6] = \binom{10}{6} (0.6)^6 (0.4)^4 = (210)(0.6)^6 (0.4)^4 = 0.251$$

مثال(32.3): ظهر دواء جديد لمعالجة سرطان الدم، معدل نجاحه 0.80 ، أعطي هذا الدواء لـ 15 مريضاً بسرطان الدم. المطلوب احسب احتمال :

1) شفاء 12 مريضاً منهم .

2) شفاء 12 مريضاً منهم على الأقل.

الحل:

لدينا هنا تجربة ثنائية (شفاء المريض أو عدم شفائه) ومكرره تكرار مستقل 15 مرة. ومِنْ ثَمَّ النموذج المدروس يتوزع وفق التوزيع الحداني بالوسطاء$n=15$، $p=0.80$ أي :

$$X \sim b(n = 15\,, P = 0.80)$$

$$P[X = K] = \binom{n}{k} P^K q^{n-k} = \binom{15}{k}(0.80)^K (0.20)^{15-k} \;;\quad k = 0,1,2,..,15$$

الطلب (1) :

$$P[X = 12] = \binom{15}{12}(0.80)^{12}(0.20)^{15-12}$$

$$= (15 \times 14 \times 13 \times 12!)/(12)!\,(15 - 12)!\,.\,(0.070)(0.008)$$
$$= (5\times 7 \times 13)\ (0.07)\ (0.008) = 0.255$$

الطلب (2):

$$P[X \geq 12] = p[x = 12] + p[x = 13] + p[x = 14] + p[x = 15]$$

$$= \binom{15}{12}(0.80)^{12}(0.20)^3 + \binom{15}{13}(0.80)^{13}(0.20)^2 + \binom{15}{14}(0.80)^{14}(0.20) + \binom{15}{15}(0.80)^{15}(0.20)^0$$

$$= 0.255 + 0.231 + 0.132 + 0.035 = 0.653$$

مثال(33.3): اختبر لقاح جديد لتحديد فعاليته في الوقاية من الزكام . وقد أعطي لعشرة أشخاص وتم مراقبتهم لفترة سنة ، ووجد أن ثمانية منهم لم يصابوا بالزكام . إذا كان احتمال عدم الإصابة بالزكام خلال سنة هو بصورة طبيعية 0.5. فما احتمال ألا يصاب ثمانية أو أكثر ، علماً أن اللقاح لا يزيد في مقاومة الجسم للبرد؟

الحل :

التجربة هنا ثنائية لأن الشخص قد يصاب أو لا يصاب .

ومكرره تكرار مستقل 10 مرات (لأن اللقاح تم تجريبه على 10 أشخاص) . ومِنْ ثَمَّ النموذج المدروس يتوزع وفق التوزيع الحداني بالوسطاء

n=10 ، p = 0.5 :

فإذا كان X المتغير الدال على الذين لم يصابوا بالزكام أي :

$$X\sim b(n = 10\ , P = \tfrac{1}{2})$$

$$P[X = K] = \binom{n}{k} P^K q^{n-k} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^K\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \ ; \quad k = 0,1,2,..,10$$

والمطلوب : $P[X \geq 8]$

$$P[X \geq 8] = P[X = 8] + P[X = 9] + P[X = 10]$$

$$= \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}(45+10+1)=0.055$$

قاعدة : يمكننا أن نثبت مايأْتي :

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لكل منها توزيع برنولي بالوسيط P وكان $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

يكون عندئذ للمتغير العشوائي Y التوزيع الحداني بالوسيطين n و P

3.1.6.3 توزيع بواسون:

توجد أمثلة نموذجية لمتغيرات عشوائية لها ولو بصورة تقريبية على الأقل توزيع بواسون. إذا كان للمتغير العشوائي X توزيع بواسون ، فإن X يمثل عدد الأحداث الملحوظة خلال وحدة قياس معينة ، زمناً كانت أم مسافة أم مساحة أم حجماً.
نقدم فيما يأْتي بعض الأمثلة التي يكون فيها للمتغير العشوائي توزيع بواسون.

- العدد العشوائي للجزئيات الصادرة عن مادة مشعة خلال خمس ثوان .
- العدد العشوائي للسيارات الصغيرة التي تصل خلال ساعة محددة من كل يوم للتزود بالوقود من محطة معينة.
- العدد العشوائي للمكالمات الهاتفية التي تصل إلى مقسم إحدى الشركات خلال ربع الساعة الأولى من ساعة محددة.
- العدد العشوائي للبذور الملقحة التي لم تنبت من عبوة تحوي عدداً محدداً من البذور (وليكن 100 بذرة).
- العدد العشوائي لحالات الإسعاف التي يستقبلها مشفى معين خلال ساعة محددة من الصباح.

- العدد العشوائي للولادات التي تحصل خلال الأسبوع الأول من كل شهر في مشفى معين .
- العدد العشوائي لحوادث المرور في مدينة معينة خلال يوم ماطر . والأمثلة كثيرة.

تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X توزيع بواسون بالوسيط μ $(\mu > 0)$ إذا كان لـ X دالة الاحتمال الآتية:

$$f(k) = P(X = k) = e^{-\mu}.\frac{\mu^{K}}{k!}\,; \quad k=0, 1, 2,\ldots$$

أي إنّ لـ X دالة التوزيع الاحتمالي :

X	0	1	2	...
$f_X(x)$	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\frac{1}{2}\mu^{2} e^{-\mu}$	...

حيث : $f(k) \geq 0$: $\forall K$ (k عدد صحيح) ، $\sum_k f(\mathrm{k}) = 1$

ويمكننا التحقق من أن التوقع الرياضي والتباين:

$$\mathrm{E(X)} = \mu \quad ; \quad \mathrm{V(X)} = \mu$$

مثال (34.3):

يصيب مرض نادر الأطفال حديثي الولادة بنسبة 0.003 فإذا كان هناك 120 ولادة حديثة في مشفى معين خلال أسبوع فما احتمال أن يكون من بينهم ثلاثة أطفال مصابين بهذا المرض ؟ وما احتمال أن يصاب منهم واحد على الأقل بهذا المرض؟

الحل :

التجربة هنا ثنائية (مصاب أو غير مصاب)

ومكرره تكرار مستقل 120 مرة ومِنْ ثَمَّ النموذج المدروس يتوزع وفق التوزيع الحداني بالوسطاء $n=120$ ، $p=0.003$ ويكون n كبيرة و p صغيرة فالنموذج سيتبع توزيع بواسون بالوسيط

$$\mu = np = (120)(0.003) = 0.36$$

$$X \sim poisson(\mu = 0.36) \Leftrightarrow P[X = K] = \frac{\mu^K}{K!} e^{-\mu} = \frac{(0.36)^K}{K!} e^{-0.36}$$

حيث $k = 0,1,2,3,4, \dots \dots$

الطلب (1):

$$P[X = 3] = \frac{(0.36)^3}{3!} e^{-0.36} = \frac{0.047}{6}(0.698) = 0.005$$

الطلب (2):

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{(0.36)^0}{0!} e^{-0.36}$$

$$= 1 - e^{-0.36} = 1 - 0.698 = 0.302$$

مثال (35.3):

إذا كان معدل عدد الولادات في مشفى دار التوليد هو ثلاث ولادات كل ساعة والمطلوب:

1. ما احتمال أن تكون هناك حالة ولادة واحدة خلال ساعة معينة؟

2. ما احتمال أن تكون هناك أربع ولادات على الأكثر خلال ساعة معينة.

الحل:

إذا كان X يدل على عدد الولادات خلال ساعة فإن X هنا يتوزع وفق التوزيع البواسوني بالوسيط μ =3.

$$X \sim poisson(\mu = 3) \Leftrightarrow P[X = K] = \frac{\mu^K}{K!} e^{-\mu}$$

حيث $k = 0,1,2,3,4, \dots ....$

الطلب (1):

$$P[X = 1] = \frac{\mu^1}{1!} e^{-\mu} = \frac{3}{1} e^{-3} = 0.149$$

الطلب (2):

$$P[X \leq 4] = \sum_{K=0}^{4} P[X = K] = \sum_{K=0}^{4} \frac{3^K}{K!} e^{-3}$$

$$= e^{-3} \left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right] = 0.82$$

4.1.6.3 <u>تقريب التوزيع الثنائي بتوزيع بواسون:</u>

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق التوزيع الحداني (الثنائي) بالوسطاء n ، P وإذا كانت n كبيرة و P صغيرة أي μ=np يبقى ثابتاً موجباً فإن X عندئذ يتوزع تقريباً وفق توزيع بواسون بالوسيط μ=np أي:

كما رأينا في المثال قبل السابق:

$$X \sim b(n,p) \approx poisson(\mu = np)$$

مثال(36.3): إذا كان احتمال أن يعاني شخص من رَدَّ فِعْلٍ سَيِّئاً عند حقنه بمصل معين هو 0.001 فأوجد احتمال أن يكون من بين 2000 شخص سيحقنون بالمصل:

1 . ثلاثة أشخاص سيعانون رَدَّ فِعْلٍ سَيِّئاً.

2. أكثر من شخص سيعانون رَدَّ فِعْلٍ سَيِّئاً.

الحل :

ليكن X المتغير الدال على عدد الأشخاص الذين سيعانون رَدَّ فِعْلٍ سَيِّئاً عند حقنهم بالمصل عندئذ:

الطلب الأول:

$$X \sim b(n = 2000, p = 0.001) \approx poisson(\mu = np = 2)$$

الطلب الثاني :

$$P[X = 3] = \frac{\mu^K}{K!} e^{-\mu} = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0.19$$

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1]$$

$$= 1 - P[X = 1] - P[X = 0]$$

$$= 1 - \frac{2}{1!} e^{-2} - \frac{2^0}{0!} e^{-2}$$

$$= 1 - 0.271 - 0.135 = 0.594$$

2.6.3 بعض التوزيعات المستمرة الشهيرة :

1.2.6.3التوزيع الأسي:

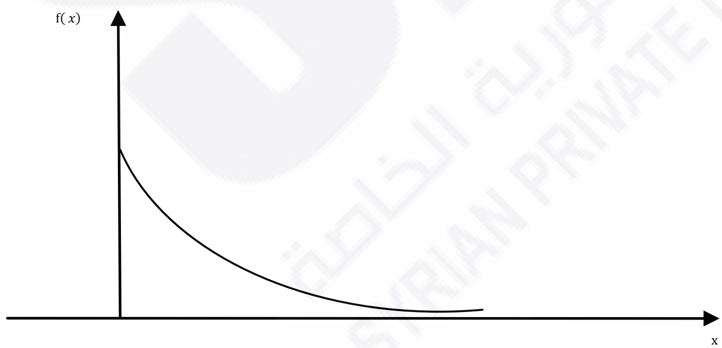
للتوزيع الأسي أهمية كبيرة في المجال التطبيقي ، إذ يعد نموذجاً مناسباً لكثير من المسائل التي تواجهنا في حياتنا العملية ، فعلى سبيل المثال ، تمثل الأزمان الآتية:

- الزمن العشوائي لمكالمة هاتفية.
- الزمن العشوائي بين مكالمتين هاتفيتين.
- الزمن العشوائي لصيانة جهاز في ورشة صيانة.
- عمر عنصر إلكتروني (مكثف ، مقاومة ، ...).
- الزمن العشوائي لتخديم زبون في مرفق خدماتي .

متغيرات عشوائية لها التوزيع الأسي.

<u>تعريف</u>: نقول إنّ للمتغير العشوائي المستمر X التوزيع الأسي بالوسيط λ ($\lambda>0$) إذا كان لـ X الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ; \ x>0\\ 0 & ; \ x\leq 0\end{cases}$$



منحني الكثافة (المنحني التكراري) للتوزيع الأسي

- **<u>دالة التوزيع الاحتمالي(المتجمع):</u>**

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & ; \quad t>0 \\ 0 & ; \ t \leq 0 \end{cases}$$

- <u>**التوقع الرياضي والتباين:**</u>

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال(37.3):

إذا كان X عمر صمام كهربائي (بالساعات) له الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} 0.0001\, e^{-0.0001x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1. أوجد دالة التوزيع المتجمع لـ X.
2. أوجد العمر الوسطي للصمام.
3. أوجد احتمال أن يعمر المصباح على الأقل 8000 ساعة.

الحل:

.1

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.0001t} & ; \ t>0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

.2

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.0001} = 1000h$$

$$P(X > 8000) = 1 - P(X \leq 8000)$$

$$= 1 - F(8000) = 1 - [1 - e^{-0.8}] = e^{-0.8} \approx 0.449$$